$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=\sin\left(0+\frac{\pi}{6}\right)-\sin(0)=\frac{\ }{2}$, $\frac{\ }{\Delta x}\ \frac{\ }{\frac{\pi}{6}}\ \frac{\ }{\pi}$

11) $y=\cos x$, $x=\frac{\pi}{2}$, $\Delta x=\frac{\pi}{4}$

حل:

$y=f(x)=\cos x$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\sqrt{2}\,\pi}=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

12) $y=\tan x$, $x=\frac{\pi}{4}$, $\Delta x=-\frac{\pi}{2}$

حل:

$y=f(x)=\tan x$

$$\Delta y=\tan(x+\Delta x)-\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)-\tan\frac{\pi}{4}=-1-1=-2 \quad , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{-\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{\pi}$$

❖ **از توابع زیر مشتق بگیرید.**

13) x^3+x^2+x+1

حل:

$y=f(x)=x^3+x^2+x+1$

روش اول : $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)+1-x^3-x^2-x-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x++3x\Delta x^2+x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+x+\Delta x+1-x^3-x^2-x-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x^2+3x\Delta x+2x+\Delta x+1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+2x+\Delta x+1\right)$$

$= \left(3x^2 + 3x(0) + 2x + 0 + 1\right) = 3x^2 + 2x + 1$

حل مسئله فوق جهت یادآوری فرمول (۵) کتاب مرجع می‌باشد لذا می‌توانیم مستقیم مشتقگیری نمائیم.

$y = f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

14) $2s^3 - 4s^2 + 8s - 16$

حل: $y = f(s) = 2s^3 - 4s^2 + 8s - 16 \Rightarrow f'(s) = 6s^2 - 8s + 8$

15) $-t^3 + 9t^2 + 5t$

حل: $y = f(t) = -t^3 + 9t^2 + 5t \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 18t + 5$

16) $4u^3 - 3u^2 - u + \pi$

حل: $y = f(u) = 4u^3 - 3u^2 - u + \pi \Rightarrow f'(u) = 12u^2 - 6u - 1$

17) $(x+1)(x^2 - x + 1)$

حل: $y = f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$

18) $(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

حل: $y = f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

19) $(x^2 - 4)(x + 4)$

حل: $y = f(x) = (x^2 - 4)(x + 4) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x - 4$

20) $\cos^2 x + \sin^2 x$

حل: $y = f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

21) $x^4 + 3x^2 - 6$

حل: $y = f(x) = x^4 + 3x^2 - 6 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6x$

22) $x^5 - 2\sqrt{x}$

حل: $y = f(x) = x^5 - 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

23) $x^9 + x^6 + x^3 + 1$

حل: $y = f(x) = x^9 + x^6 + x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 9x^8 + 6x^5 + 3x^2$

24) $2x^{10} - 3x^7 + 5x^3 + 20$

حل: $y = f(x) = 2x^{10} - 3x^7 + 5x^3 + 20 \Rightarrow f'(x) = 20x^9 - 21x^6 + 15x^2$

25) $x^{100} - 2x^{50} + 25x$

حل: $y = f(x) = x^{100} - 2x^{50} + 25x \Rightarrow f'(x) = 100x^{99} - 100x^{49} + 25$

26) $3\sin x - 4\cos x$

حل: $y = f(x) = 3\sin x - 4\cos \Rightarrow f'(x) = 3\cos x + 4\sin x$

$27)\ s^4 - s^3 + 3s^2 + 8$

حل: $y = f(s) = s^4 - s^3 + 3s^2 + 8 \Rightarrow f'(s) = 4s^3 - 3s^2 + 6s$

$28)\ 10t^5 - 100t^4 + 1000t$

حل: $y = f(t) = 10t^5 - 100t^4 + 1000t \Rightarrow f'(t) = 50t^4 - 400t^3 + 1000$

$29)\ 5u^7 - 7u^6 + 9u^5 - 11$

حل: $y = f(u) = 5u^7 - 7u^6 + 9u^5 - 11 \Rightarrow f'(u) = 35u^6 - 42u^5 + 45u^4$

$30)\ 8w^3 - 4\sqrt{w} + \cos w$

حل: $y = f(w) = 8w^3 - 4\sqrt{w} + \cos w \Rightarrow f'(w) = 24w^2 - \frac{2}{\sqrt{w}} - \sin w$

$31)\ (x^2+3)(x^2-3)$

حل: $y = f(x) = (x^2+3)(x^2-3) = x^4 - 9 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$32)\ (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

حل: $y = f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$= (x^4-1)(x^4+1) = x^8 - 1 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$

33) حد $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ را به صورت مشتق تعبیر کرده و آن را محاسبه کنید.

حل:

$$y = f(x) = x^3 \Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4) = 12$$

پس مشتق تابع x^3 در نقطهٔ -2 می‌باشد که مقدار آن برابر با 12 است.

34) موضع یک ذره متحرک در امتداد خطی مستقیم در لحظهٔ $t \geq 0$ با $S = t^4 - 4t^3 + 4t^2$

حل:

$$f(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2$$

$$V(t) = \lim_{u \to t} \frac{f(u) - f(t)}{u-t} = \lim_{u \to t} \frac{u^4 - 4u^3 + u^2 - t^4 + 4t^3 - t^2}{u-t}$$

$$= \lim_{u \to t} \frac{u^4 - t^4 - 4(u^3 - t^3) + 4(u^2 - t^2)}{u-t}$$

$$= \lim_{u \to t} \frac{(u-t)(u^3 + u^2t + t^2u + t^3) - 4(u-t)(u^2 + ut + t^2) + 4(u-t)(u+t)}{u-t}$$

$$= \lim_{u \to t} \frac{(u-t)\left[(u^3 + u^2t + t^2u + t^3) - 4(u^2 + ut + t^2) + 4(u+t)\right]}{u-t}$$

❖ معادلهٔ مماس بر منحنی داده شده را بیابید.

1) $y=x^2+2x+3 \quad , \quad (-1,2)$

حل: $f(x)=x^2+2x+2 \quad , \quad a=-1 \quad , \quad f(a)=2 \quad , \quad f'(x)=2x+2 \quad , \quad f'(a)=2(-1)+2=0$

معادله خط مماس : $y=f'(a)(x-a)+f(a) \quad \Rightarrow \quad y=0(x+1)+2 \quad \Rightarrow \quad y=2$

2) $y=2-x-x^2 \ , (2,-4)$

حل: $f(x)=2-x-x^2 \quad , \quad a=2 \quad , \quad f(a)=-4 \quad , \quad f'(x)=-1-2x \quad , \quad f'(a)=-1-2(2)=-5$

معادله خط مماس : $y=-5(x-2)-4 \quad \Rightarrow \quad y=-5x+6$

3) $y=\frac{1}{3}x^3-1,\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$

حل: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-1 \quad , \quad a=-1 \quad , \quad f(a)=-\frac{4}{3} \quad , \quad f'(x)=x^2 \quad , \quad f'(a)=1$

معادله خط مماس : $y=1(x+1)-\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad y=x-\frac{1}{3}$

4) $y=2x^4 \quad , \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$

حل: $f(x)=2x^4 \quad , \quad a=\frac{1}{2} \quad , \quad f(a)=\frac{1}{8} \quad , \quad f'(x)=8x^3 \quad , \quad f'(a)=1$

معادله خط مماس : $y=1\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad y=x-\frac{3}{8}$

5) $y=\sqrt{x} \quad , \quad (4,2)$

حل: $f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad a=4 \quad , \quad f(a)=2 \quad , \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(a)=\frac{1}{4}$

معادله خط مماس : $y=\frac{1}{4}(x-4)+2 \quad \Rightarrow \quad y=-x+\pi$

6) $y=\sin x \quad , \quad (\pi,0)$

حل: $f(x)=\sin x \quad , \quad a=\pi \quad , \quad f(a)=0 \quad , \quad f'(x)=\cos x \quad , \quad f'(a)=-1$

معادله خط مماس : $y=-1(x-\pi) \quad \Rightarrow \quad y=-x+\pi$

7) $y=\cos x \ , \left(\frac{\pi}{2},0\right)$

حل: $f(x)=\cos x \quad , \quad a=\frac{\pi}{2} \quad , \quad f(a)=0 \quad , \quad f'(x)=-\sin x \quad , \quad f'(a)=-1$

معادله خط مماس : $y=-1(x-0)+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y=-x+\frac{\pi}{2}$

8) $y=\sin x+\cos x \quad , \quad \left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$

حل: $y=\sin x+\cos x \quad , \quad a=\frac{\pi}{4} \quad , \quad f(a)=\sqrt{2} \quad , \quad f'(x)=\cos x-\sin x$

$, f'(a)=\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=0$

معادله خط مماس : $y=0\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{2}$

❖ مماس (یا مماسهای) منحنی داده شده، که از نقطه P می‌گذرد بیابید (در هر حالت P بر منحنی قرار ندارد.)

9) $y=x^2 \quad , \quad P=(3,8)$

حل: معادله مماس بر منحنی $y=x^2$ در نقطه (a,a^2) عبارتست از:

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$f(x)=x^2 \quad , \quad f(a)=a^2 \quad , \quad f'(a)=2x \quad , \quad f'(a)=2a$

$y=2a(x-a)+a^2 \Rightarrow y=2ax-a^2 \quad (1)$

و چون خط مماس از نقطه $P=(3,8)$ می‌گذرد پس نقطه P باید در خط مماس یا (۱) صدق نمائید.

$P=(3,8) \Rightarrow 8=2a(3)-a^2 \Rightarrow a^2-6a+8=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=2 \end{cases}$

بنابراین مقادیر بدست‌آمده را در معادله (۱) قرار داده و مماسهای آن بدست می‌آوریم:

مُعادلات خط مماس : $\begin{cases} y=8x-16 \\ y=4x-4 \end{cases}$

10) $y=x^3 \quad , \quad P=(0,2)$

حل: $f(x)=x^3 \quad , \quad f(a)=a^3 \quad , \quad f'(x)=3x^2 \quad , \quad f'(a)=3a^2$

$y=3a^2(x-a)+a^3 \quad , \quad P=(0,2) \Rightarrow 2=3a^2(0-a)+a^3 \Rightarrow -2a^3=2 \Rightarrow a=-1$

معادله خط مماس : $y=3(x+1)-1 \Rightarrow y=3x+2$

11) $y=x^4 \quad , \quad P=(0,-3)$

حل: $f(x)=x^4 \quad , \quad f(a)=a^4 \quad , \quad f'(x)=4x^3 \quad , \quad f'(a)=4a^3$

$y=4a^3(x-a)+a^4 \quad , \quad P=(0,-3) \Rightarrow -3=4a^3(0-a)+a^4 \Rightarrow -3=-3a^4 \Rightarrow a=\pm 1$

معادلات خطوط مماس : $\begin{cases} y=4(x-1)+1 \\ y=-4(+1)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4x-3 \\ y=-4x-3 \end{cases}$

❖ آیا منحنی داده شده دو مماس موازی متمایز دارد؟

12) $y=x^2$

حل: خیر. زیرا معادلهٔ شیب خط مماس در هر نقطه منحصر بفرد است

$f(x)=x^2 \Rightarrow m(x)=f'(x)=2x$

13) $y = x^3$

$f(x) = x^3 \Rightarrow m(x) = f'(x) = 3x^2$

حل: بله.

زیرا معادلهٔ شیب خط مماس در هر نقطه مانند a و $-a$ با هم برابر می‌شود .

14) $y = \sin x$

$f(x) = \sin x \Rightarrow m(x) = f'(x) = \cos x$

حل: بله.

زیرا معادلهٔ شیب خط مماس در هر نقطه مانند a و $-a$ با هم برابر می‌شود

❖ آیا منحنی داده شده دو مماس عمود برهم دارند؟

15) $y = x^3$

$f(x) = x^3 \ , \ f'(x) = 3x^2$

حل: خیر.

زیرا در هیچ دو نقطه ای مانند a, b شرط عمود بودن دوخط مماس $-1 = f'(a) \times f'(b)$ صدق نمی‌کند.

16) $y = x^2$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

حل: بله.

زیرا نقاطی مانند a, b وجود دارند به طوری که: $f'(a) \times f'(b) = -1$

به عنوان مثال: $a = \frac{1}{2} \ , \ b = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) \times 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

17) $y = \sin x$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

حل: بله.

زیرا نقاطی مانند a, b وجود دارند که در شرط عمود بودن دو خط مماس $-1 = f'(a) \times f'(b)$ صدق می‌کند.

18) در چه نقطه‌ای از منحنی $y = x^2$ مماس موازی قاطع مار بر نقاط منحنی به طولهای 3,1 است؟

حل: فرض می‌کنیم m شیب خط قاطع مار بر نقاط منحنی به طولهای 3,1 باشد

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-1}{3-1} = 4 \qquad \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم (x_0, y_0) نقطهٔ تماس خط مماس با منحنی $y = x^2$ باشدوچون خط مماس باید با خط قاطع مار موازی باشد پس شیب دو خط با هم برابر است.

$m = 4 = f'(x_0) = 2x_0 \Rightarrow x_0 = 2 \ , y_0 = 4$

19) در چه نقطه از منحنی $y = x^2 - 2x + 5$ مماس بر خط $y = x$ عمود است؟

فرض می‌کنیم (x_0, y_0) نقطه تماس خط مماس با منحنی $y = x^2 - 2x + 5$ باشد لذا داریم که:

$f_1(x) = x^2 - 2x + 5 \ , \ f_1'(x) = 2x - 2 \ , \ m_1 = f_1'(x_0) = 2x_0 - 2$

$f_2(x) = x \ , \ f_2'(x) = 1 \ , \ m_2 = f_2'(x_0) = 1$

شرط عمود بودن : $m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow (2x_0 - 2) \times 1 = -1 \Rightarrow 2x_0 = +1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

❖ از عبارات زیر مشتق بگیرید.

1) $3x^2-4x^{-3}$

حل: $f(x)=3x^2-4x^{-3} \Rightarrow f'(x)=-3\times 2x^{-2-1}+5\times 3x^{-3-1}=-6x^{-3}+15x^{-4}$

2) $6x^{-4}+5x^{-5}+4x^{-6}$

حل: $f(x)=6x^{-4}+5x^{-5}+4x^{-6}$

$f'(x)=-6\times 4x^{-4-1}-5\times 5x^{-5-1}-4\times 6x^{-6-1}=-24x^{-5}-25x^{-6}-24x^{-7}$

3) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

حل: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

$f'(x)=\frac{0\times x-|x|}{x^2}+\frac{0\times x^2-2x\times 2}{x^4}+\frac{0\times x^3-3x^2\times 3}{x^6}=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}$

4) $\frac{1}{x^{10}}+\frac{1}{x^5}+100$

حل: $f(x)=\frac{1}{x^{10}}+\frac{1}{x^5}+100 \Rightarrow f'(x)=\frac{0\times x^{10}-10x^9\times 1}{x^{20}}+\frac{0\times x^5-5x^4\times 1}{x^{10}}+0=-\frac{10}{x^{11}}-\frac{5}{x^6}$

5) $(1+x^2)(2-x^2)$

حل: $f(x)=(1+x^2)(2-x^2) \Rightarrow f'(x)=2x(2-x^2)+(-2x)(1+x^2)=2x-4x^3$

6) $(1+4x^2)(1+2x^2)$

حل: $f(x)=(1+4x^2)(1+2x^2) \Rightarrow f'(x)=8x(1+2x^2)+4x(1+4x^2)=12x+32x^3$

7) $(1-x^2)(1+x^3)$

حل: $f(x)=(1-x^2)(1+x^3) \Rightarrow f'(x)=-2x(1+x^3)+3x^2(1-x^2)=-2x+3x^2-5x^4$

8) $(x-1)(x^2+x+1)$

حل: $f(x)=(x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow f'(x)(x^2+x+1)+(2x+1)(x-1)=3x^2$

9) $(x+1)(x^2-x+1)$

حل: $f(x)(x+1)(x^2-x+1) \Rightarrow f'(x)=(x^2-x+1)+(2x-1)(x+1)=3x^2$

10) $(1-x^{99})(1+x^{99})$

حل: $f(x)=(1-x^{99})(1+x^{99}) \Rightarrow f'(x)=-99x^{98}(1+x^{99})+99x^{98}(1-x^{99})=-198x^{197}$

11) $(2-x^3)(1+x^{-2})$

حل: $f(x)=(2-x^3)(1+x^2) \Rightarrow f'(x)=-3x^2(1+x^{-2})+(-2x^{-3})(2-x^3)=-3x^2-1-4x^{-3}$

$12)\left(2+x^2\right)\left(1-x^{-3}\right)$

حل: $f(x)=\left(2+x^2\right)\left(1-x^{-3}\right) \Rightarrow f'(x)=2x\left(1-x^{-3}\right)+3x^{-4}\left(2+x^2\right)=2x+x^{-2}+6x^{-4}$

$13)\left(1-x^{-5}\right)^2$

$f(x)=\left(1-x^{-5}\right)^2 \Rightarrow f'(x)=2\left(1-x^{-5}\right)\left(5x^{-6}\right)=10x^{-6}-10x^{-11}$

$14)\left(1+x+x^{-1}\right)\left(1+x-x^{-1}\right)$

حل: $f(x)=\left(1+x+x^{-1}\right)\left(1+x-x^{-1}\right)=(1+x)^2-x^{-2} \Rightarrow f'(x)=2(1+x)+2x^{-3}=2+x+2x^{-3}$

$15)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)$

حل: $f=\left(1+x^2\right)+\left(1+x^3\right)(1+x)$

$f'(x)=2x\left(1+x^3\right)\left(1+x^4\right)+3x^2\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)+4x^3\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)$

$f'(x)=2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+9x^8$

$16)(1-x)\left(1+x+x^2\right)\left(1+x^3\right)$

حل: $f(x)=(1-x)\left(1+x+x^2\right)\left(1+x^3\right)$

$f'(x)-1\left(1+x+x^2\right)\left(1+x^3\right)+(1+2x)(1-x)\left(1+x^3\right)+3x^2(1-x)\left(1+x+x^2\right)=-6x^5$

$17)\frac{1}{1+x}$

حل: $f(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x)=\frac{0(1+x)-1(1)}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)^2}$

$18)\frac{1-x}{1+x}$

حل: $f(x)=\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}=-\frac{2}{(1+x)^2}$

$19)\frac{x^2}{1+x^2}$

حل: $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\left(1+x^2\right)-2x\left(x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$20)\frac{x^3+1}{x^2-1}$

حل: $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-2x\left(x^3+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$

$21)\frac{x^3-1}{x^3+1}$

حل: $f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1} \Rightarrow f'(x)\frac{3x^2\left(x^3+1\right)-3x^2\left(x^3-1\right)}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{6x^2}{\left(x^3+1\right)}$

22) $\dfrac{x^2+5x}{x^3-3}$

حل: $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{x^3-3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+5)(x^3-3)-3x^2(x^2+5x)}{(x^3-3)^2}=\dfrac{-x^4-10x^3-6x-15}{(x^4-3)^2}$

23) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

حل: $f(x)=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1-2x)(1-x+x^2)-(-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}=\dfrac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$

24) $\dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

حل: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

$f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+2x-3)-(2x+2)(x^3-1)}{(x^2+2x-3)^2}=\dfrac{x^4+4x^3-9x^2+2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$

25) $\dfrac{t^4-1}{t^2-3t+2}$

حل: $f(t)=\dfrac{(t-1)(t^3+t^2+t+1)}{(t-1)(t-2)}=\dfrac{t^3+t^2+t+1}{t-2}$

$f'(t)=\dfrac{(3t^2+2t+1)(t-2)+(t^3+t^2+t+1)}{(t-2)^3}=\dfrac{2t^3-5t^2-4t-3}{(t-2)^2}$

26) $\dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$

حل: $f(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \Rightarrow f'(t)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}}(1+\sqrt{t})-\frac{1}{2\sqrt{t}}(\sqrt{t})}{(1+\sqrt{t})^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$

27) $\dfrac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$

حل: $f(u)=\dfrac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \Rightarrow f'(u)=\dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{u}}(1+\sqrt{u})-\frac{1}{2\sqrt{u}}(1-\sqrt{u})}{(1+\sqrt{u})^2}=\dfrac{-1}{\sqrt{u}(1+\sqrt{u})^2}$

28) $u^2\cos u$

حل: $f(u)=u^2\cos u \Rightarrow f'(u)=2u\cos u-u^2\sin u$

29) $\dfrac{\sin v}{v}$

حل: $f(v)=\dfrac{\sin v}{v} \Rightarrow f'(v)=\dfrac{v\cos v-\sin v}{v^2}$

30) $\dfrac{\tan v}{\sqrt{v}}$

حل: $f(v)=\dfrac{\tan v}{\sqrt{v}} \Rightarrow f'(v)=\dfrac{\left(1+\tan^2 v\right)\sqrt{v}-\dfrac{1}{2\sqrt{v}}\tan v}{\left(\sqrt{v}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{v}\sec^2 v-\dfrac{1}{2\sqrt{v}}\tan v}{v}$

31) $\sqrt{w}\cot w$

حل: $f(w)=\sqrt{w}\cot w \Rightarrow f'(w)=\dfrac{1}{2\sqrt{w}}\cot w-\left(1+\cot^2 w\right)\sqrt{w}=\dfrac{\cot w}{2\sqrt{w}}-\sqrt{w}\csc^2 w$

32) $w^3\sec w$

حل: $f(w)=w^3\sec w \Rightarrow f'(w)=3w^2\sec w+w^3\sec w\tan w$

33) $2x\csc x$

حل: $f(x)=2x\csc x \Rightarrow f'(x)=2\csc x-2x\csc x\cot x=2\csc x(1-2\cot x)$

34) $x^2\sin^2 x$

حل: $f(x)=x^2\sin^2 x \Rightarrow f'(x)=2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x=2x\sin^2 x+x^2\sin 2x$

35) $x\sin x\tan x$

حل: $f(x)=x\sin x\tan x \Rightarrow f'(x)=\sin x\tan x+x\cos x\tan x+x\sin x\left(1+\tan^2 x\right)$

$f'(x)=\sin x\tan x+x\cos x\tan x+x\sin x\sec^2 x=\tan x\sin x+x\cos x\dfrac{\sin x}{\cos x}+x\sin x\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$=\tan x\sin x+x\sin x+x\tan\sec x$

36) $\dfrac{1}{1+\sin x}$

حل: $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{0(1+\sin x)-(1)\cos x}{(1+\sin x)^2}=-\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

37) $\dfrac{1}{1-\cos x}$

حل: $f(x)=\dfrac{1}{1-\cos x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{0(1-\cos x)+(1)\sin x}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$

38) $\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

حل: $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x} \Rightarrow f'(x)\dfrac{-\cos x(1-\cos x)+\sin x(1-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x-\cos x-1}{(1+\cos x)^2}$

39) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$

حل:

$$f(x)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{\left(1+\tan^2 x\right)\left(1-\tan x\right)+\left(1+\tan x\right)\left(1+\tan^2 x\right)}{(1-\tan x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x(1-\tan x)+\sec^2 x(1+\tan x)}{(1-\tan x)^2}=\frac{\sec^2 x(1-\tan x+1+\tan x)}{(1-\tan x)^2}=\frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

40) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

حل:

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2\sin x\cos x\cos x+\sin x\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2\sin x\cos^2 x+\sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$=2\sin x+\tan^2 x\sin x=\sin x\left(2+\tan^2 x\right)$$

41) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

حل:

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{-\sin x\sin^2 x-2\sin x\cos x\cos x}{\sin^4 x}=-\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$f'(x)=-\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cos^2 x}{\sin^3 x}=-\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$$

$$=-\frac{1+\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^3 x}=-\frac{2-\sin^2 x}{\sin^3 x}=\frac{\sin^2 x-2}{\sin^3 x}=\frac{1}{\sin x}-\frac{2}{\sin^3 x}=\csc x-2\csc^3 x$$

42) $\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

حل:

$$f(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{(\cos x-\cos x+x\sin x)(\cos x+x\sin x)-(-\sin x+\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

$$=\frac{x\sin\cos x+(x\sin x)^2-x\sin x\cos x+(x\cos x)^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

$$=\frac{x^2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{(\cos x+x\sin x)^2}=\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

❖ دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید.

43) $x^{-2}+x^{-1}+7$

حل:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-2}+x^{-1}+7\right)=-2x^{-3}-x^{-2}+0 \quad\Rightarrow\quad d\left(x^{-2}+x^{-1}+7\right)=\left(-2x^{-3}-x^{-2}\right)dx$$

44) $\dfrac{1}{1-x}$

حل:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2} \quad\Rightarrow\quad d\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}\,dx$$

45) $\dfrac{x}{1+x}$

حل: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)=\dfrac{1(1+x)-x}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad d\left(\dfrac{x}{1+x}\right)=\dfrac{1}{(1+x)^2}\,dx$

46) $x\tan x$

حل: $\dfrac{d}{dx}(x\tan x)=\tan x+x\left(1+\tan^2 x\right)=\tan x+x\sec^2 x \Rightarrow d(x\tan x)=\left(\tan x+x\sec^2 x\right)dx$

47) $\sqrt{x}\sin x$

حل: $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\sin x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x \quad \Rightarrow \quad d\left(\sqrt{x}\sin x\right)=\left(\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x\right)dx$

48) $\dfrac{x}{\sin x}$

حل: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad d\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=\left(\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos^2 x}\right)dx$

49) $\dfrac{x}{\cos x}$

حل: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad d\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)=\left(\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

50) $\csc^2 x$

حل: $\dfrac{d}{dx}\left(\csc^2 x\right)=-2\csc x\csc x\cot x=-2\csc^2 x\cot x \quad \Rightarrow \quad d\left(\csc^2 x\right)=\left(-2\csc^2 x\cot x\right)dx$

51) با کمی تلاش نشان دهید که : $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^4-5x^4+4}{x^3+2x^2-x-2}=1$

حل: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{(x-2)\left(x^3+2x^2-x-2\right)}{x^3+2x^2+x-2}=\dfrac{d}{dx}(x-2)=1 \quad \Rightarrow \quad d(x-2)=1$

$\Rightarrow \quad d\left(\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}\right)=1$

52) قواعد حاصل‌ضرب و خارج قسمت زیر برای دیفرانسیلها را که شبیه قواعد مشتقها هستند اثبات نمایید:

$$d(fg)=g\,df+f\,dg\,, \qquad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,df-f\,dg}{g^2}$$

حل: $\dfrac{d}{dx}(fg)=\dfrac{df}{dx}g+f\dfrac{dg}{dx} \xrightarrow{\text{طرفین در } dx} d(fg)=df.g+f.dg$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\dfrac{df}{dx}-f\dfrac{dg}{dx}}{g^2} \xrightarrow{\text{طرفین در } dx} d\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\,df-f\,dg}{g^2} \qquad (g\neq 0)$

❖ از عبارات زیر مشتق بگیرید .

$1)\left(x^2-2x+1\right)^2$

حل: $\left(x^2-2x+1\right)^2=(x-1)^3 \quad , \quad f(x)=x-1 \quad , \quad g(x)=x^3 \quad , \quad g(f(x))=(x-1)^3$

طبق فرمول (1) : $\dfrac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dx}(x-1)^3\cdot 1=3(x-1)^2$

$2)\left(x^2+1\right)^3$

حل: $f(x)=x^2+1, g(x)=x^3, g(f(x))=\left(x^2+1\right)^3 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}g(f(x))=3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x=6x\left(x^2+1\right)^2$

$3)(2x+3)^4$

حل: $y=(2x+3)^4 \quad \Rightarrow \quad y'=4(2x+3)^3\cdot 2=8(2x+3)^3$

$4)\left(x^3+1\right)^5$

حل: $y=\left(x^3+1\right)^5 \quad \Rightarrow \quad y'=\left(x^3+1\right)^4\cdot 3x^2=15x^2\left(x^3+1\right)^4$

$5)\left(1-3x^2\right)^6$

حل: $y=(1-3x^2)^6 \quad \Rightarrow \quad y'=6\left(1-3x^2\right)^5(-6x)=-36x\left(1-3x^2\right)^5$

$6)\left(x^2+x-1\right)^7$

حل: $y=\left(x^2+x-1\right)^7 \quad \Rightarrow \quad y'=7\left(x^2+x-1\right)^6(2x+1)=7(2x+1)\left(x^2+x-1\right)^6$

$7)(x+1)^3(x-1)^4$

حل: $y=(x+1)^3(x-1)^4$

$y'=3(x+1)^2(x-1)^4+4(x-1)^3(x+1)^3$

$=3(x+1)^2(x-1)^4+4\left(x^2-1\right)^3=3(x+1)^2(x-1)^2(x-1)^2+4\left(x^2-1\right)^3$

$=3\left(x^2-1\right)^2(x-1)^2+4\left(x^2-1\right)^3=\left(x^2-1\right)^2\left[3(x-1)^2+4\left(x^2-1\right)\right]$

$=\left(x^2-1\right)^2\left[3(x-1)^2+4(x-1)(x+1)\right]=\left(x^2-1\right)^2(x-1)\left[3(x-1)+4(x+1)\right]$

$=\left(x^2-1\right)^2(x-1)(7x+1)$

$8)(1-x)\left(1-x^2\right)^2$

حل: $y=(1-x)\left(1-x^2\right)^2$

$y'=-\left(1-x^2\right)^2+2(1-x^2)(1-x)(-2x)=-\left(1-x^2\right)^2-4x\left(1-x^2\right)(1-x)$

$9)(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

حل: $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

$$y'=(x+2)^2(x+3)^3+2(x+2)(x+1)(x+3)^3+3(x+3)^2(x+1)(x+2)^2$$
$$=2(x+2)(x+3)^2\left[\frac{1}{2}(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+\frac{3}{2}(x+2)(x+1)\right]$$
$$=2(x+2)(x+3)^2\left[\frac{1}{2}(x^2+5x+6)+(x^2+4x+3)+\frac{3}{2}(x^2+3x+2)\right]$$
$$=2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$$

10) $\frac{x^2}{(x+1)^2}$

حل: $y=\frac{x^2}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=\frac{2x(x+1)^2-2(x+1)x^2}{(x+1)^4}=\frac{2x(x+1)-2x^2}{(x+1)^3}=\frac{2x}{(x+1)^3}$

11) $\frac{(1-x)^2}{(1+x)^3}$

حل: $y=\frac{(1-x)^2}{(1+x)^3}\Rightarrow y'=\frac{-2(1-x)(1+x)^3-3(1+x)^2(1-x)^2}{(1+x)^6}$
$$=\frac{-2(1-x)(1+x)-3(1-x)^2}{(1+x)^4}=\frac{-2+2x^2-3+6x-3x^2}{(1+x)^4}$$
$$=\frac{-x^2+6x-6}{(1+x)^4}=\frac{(1-x)(5-x)}{(1+x)^4}$$

12) $\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2$

حل: $y=\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2=\frac{(1-2x)^2}{(1+2x)^2}\Rightarrow y'=\frac{-4(1-2x)(1+2x)^2-4(1+2x)(1-2x)^2}{(1+2x)^4}$
$$=\frac{-4(1-2x)(1+2x)[(1+2x)+(1-2x)]}{(1+2x)^3}=-\frac{-8(1-2x)}{(1+2x)^3}$$

13) $\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^2}$

حل: $y=\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=\frac{4x(x^2+1)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+1)^2}{(x-1)^4}$
$$=\frac{2(x^2+1)(x-1)[2x(x-1)-(x^2+1)]}{(x-1)^4}=\frac{-4(x^2+1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^3}$$

14) $\frac{x}{(1-x^2)(1+x)^2}$

حل: $y=\frac{x}{(1-x^2)(1+x)^2}=\frac{x}{(1-x^2)^2}\Rightarrow y'=\frac{(1-x^2)^2+4x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}=\frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}$

15) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{10}$

حل: $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{10}=\frac{(1+x)^{10}}{(1-x)^{10}}\Rightarrow y'=\frac{10(1+x)^9(1-x^{10})+10(1-x)^9(1+x)^{10}}{(1-x)^{20}}$

$=\frac{10(1+x)^9(1-x)+10(1+x)^{10}}{(1-x)^{11}}=\frac{20(1+x)^9}{(1-x)^{11}}$

16) $x\sqrt{1+x^2}$

حل: $y=x\sqrt{1+x^2}\Rightarrow y'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$

17) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

حل: $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\Rightarrow y'=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\times\sqrt{1+x}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\times\sqrt{1-x}}{1+x}=\frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

18) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

حل: $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}=(x+\sqrt{x})^{1/2}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-1/2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

19) $x^{3/2}-x^{4/3}+1$

حل: $y=x^{3/2}-x^{4/3}+1\Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{4}{3}x^{1/3}$

20) $9x^{10/9}-10x^{9/10}$

حل: $y=9x^{10/9}-10x^{9/10}\Rightarrow y'=10x^{1/9}-9x^{-1/10}$

21) $x^{0.99}+x^{-0.99}$

حل: $y=x^{0.99}+x^{-0.99}\Rightarrow y'=0.99x^{-0.01}-0.99x^{-1.99}=0.99(x^{-0.01}-x^{-1.99})$

22) $(s^2+s+2)^{7/11}$

حل: $y=(S^2+S+2)^{7/11}\Rightarrow y'=\frac{7}{11}(2S+1)(S^2+S+2)^{-4/11}$

$\frac{7}{11}-1=\frac{7-11}{11}=-\frac{4}{11}$

23) $\sqrt[3]{t}+\sqrt[4]{t}+\sqrt[5]{t}$

حل:

$$y=\sqrt[3]{t}+\sqrt[4]{t}+\sqrt[5]{t}=t^{1/3}+t^{1/4}+t^{1/5}$$

$$y'=\frac{1}{3}t^{-2/3}+\frac{1}{4}t^{-3/4}+\frac{1}{5}t^{-4/5}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}+\frac{1}{5\sqrt[5]{t^4}}$$

24) $\frac{1}{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$

حل:

$$y=\frac{1}{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{1}{\sqrt[3]{u}}=u^{-1}+u^{-1/2}+u^{-1/3}$$

$$y'=-u^{-2}-\frac{1}{2}u^{-3/2}-\frac{1}{3}u^{-4/3}=\frac{-1}{u^2}-\frac{1}{2\sqrt{u^3}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{u^4}}=-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{2u\sqrt{u}}-\frac{1}{3u\sqrt[3]{u}}$$

25) $\sqrt[3]{v^2}-\frac{3}{\sqrt{v}}$

حل:

$$y=\sqrt[3]{v^2}-\frac{3}{\sqrt{v}}=v^{2/3}-3(v)^{-1/2}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{2}{3}v^{-1/3}+\frac{3}{2}v^{-3/2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{v}}+\frac{3}{2\sqrt{v^3}}$$

26) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

حل:

$$y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=\left(1+\sqrt{x}\right)^{1/3}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-2/3}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{6\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\right)}$$

27) $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$

حل:

$$y=\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{1/2}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}\right)=\frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}}$$

28) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$

حل:

$$y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}=(1+\sqrt[3]{x})^{1/3}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-2/3}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)=\frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{9\sqrt{x^2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}$$

29) $\sin^2 x+\tan^2 x$

حل:

$$y=\sin^2 x+\tan^2 x\quad\Rightarrow\quad y'=2\sin x\cos x+2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)=\sin 2x+2\tan x\sec^2 x$$

30) $\sin^3 x+\cos^3 x$

حل:

$$y=\sin^3 x+\cos^3 x\quad\Rightarrow\quad y'=3\sin^2 x\cos x-3\cos^2 x\sin x$$

31) $(1+\sin 2x)^3$

حل:

$$y=(1+\sin 2x)^3 \quad \Rightarrow \quad y'=3(1+\sin 2x)^2(2\cos 2x)=6\cos 2x(1+\sin 2x)^2$$

32) $\frac{1}{3}\tan^3 x+\cot 3x$

حل:

$$y=\frac{1}{3}\tan^3 x+\cot 3x$$

$$y'=\tan^2 x(1+\tan^2 x)-3(1+\cot^2 3x)=\tan^2 x\sec^2 x-3\csc^2 3x$$

33) $3\cos 2x+2\sec 3x$

حل:

$$y=3\cos 2x+2\sec 3x \quad \Rightarrow \quad y'=-6\sin 2x+6\sec 3x\tan 3x$$

34) $(1-\cos x)^{-2}$

حل:

$$y=(1-\cos x)^{-2} \quad \Rightarrow \quad y'=2(1-\cos x)^{-3}(\sin x)=-2\sin x(1-\cos x)^{-3}$$

35) $x\sin\frac{1}{x}$

حل:

$$y=x\sin\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y'=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

36) $x^2\cos\frac{1}{x}$

حل:

$$y=x^2\cos\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y'=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$

37) $\sqrt{1+\sin u}$

حل:

$$y=\sqrt{1+\sin u} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{\cos u}{2\sqrt{1+\sin u}}$$

38) $\sqrt{\frac{1+\cos v}{1-\sin v}}$

حل:

$$y=\sqrt{\frac{1+\cos v}{1-\sin v}}=\frac{\sqrt{1+\cos v}}{\sqrt{1-\sin v}} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{\frac{-\sin v}{2\sqrt{1+\cos v}}}{\frac{-\cos v}{2\sqrt{1-\sin v}}}=\frac{\sin v\sqrt{1-\sin v}}{\cos v\sqrt{1+\cos v}}=\tan v\sqrt{\frac{1-\sin v}{1+\cos v}}$$

39) $\cos w^3$

حل:

$$y=\cos w^3 \Rightarrow y'=-3w^2\sin w^3$$

40) $(1+\tan x)^{2/3}$

حل:

$$y=(1+\tan x)^{2/3} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{2}{3}(1+\tan x)^{-1/3}(1+\tan^2 x)=\frac{2}{3}\sec^2 x(1+\tan x)^{-1/3}$$

41) $\cos(\cos x)$

حل:

$$y=\cos(\cos x) \quad \Rightarrow \quad y'=\sin x\sin(\cos x)$$

42) $\sin(\tan x)$

حل: $y=\sin(\tan x) \Rightarrow y'=(1+\tan^2 x)\cos(\tan x)=\sec^2 x\cos(\tan x)$

43) $\sin(\sin(\sin x))$

حل: $\sin(\sin x)=t \Rightarrow t'=\cos x\cos(\sin x)$

$y=\sin(\sin(\sin x))=\sin(t)$

$y'=t'\cos(t)=\cos x\cos(\sin x)\cos(\sin(\sin x))=\cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$

44) $\sin(\cos x^2)$

حل: $y=\sin(\cos x^2) \Rightarrow y'=-2x\sin x^2\cos(\cos^2 x)$

❖ دیفرانسیل عبارات زیر را بیابید.

45) $(x^4-2)^3$

حل: $\frac{d}{dx}(x^4-2)^3=3(x^4-2)^2(4x^3)=12x^3(x^4-2)^2 \Rightarrow d(x^4-2)^3=12x^3(x^4-2)^2\,dx$

46) $\sqrt{1-x^2}$

حل: $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow d\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

47) $x^{3/5}+x^{5/3}$

حل: $\frac{d}{dx}\left(x^{3/5}+x^{5/3}\right)=\frac{3}{5}x^{-2/5}+\frac{5}{3}x^{2/3} \Rightarrow d\left(x^{3/5}+x^{5/3}\right)=\left(\frac{3}{5}x^{-2/5}+\frac{5}{3}x^{2/3}\right)dx$

48) $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

حل: $\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow d\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\,dx$

49) $\cos\sqrt{x}$

حل: $\frac{d}{dx}(\cos\sqrt{x})=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} \Rightarrow d(\cos\sqrt{x})=-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$

50) $\sin(\cos x)$

حل: $\frac{d}{dx}(\sin(\cos x))=-\sin x\cos(\cos x) \Rightarrow d(\sin(\cos x))=-\sin x\cdot\cos(\cos x)\,dx$

51) $\tan u^2$

حل: $\frac{d}{du}(\tan u^2)=2u(1+\tan^2 u^2)=2u\sec^2 u^2 \Rightarrow d(\tan u^2)=(2u\sec^2 u^2)\,du$

52) $\tan(\cot v)$

حل: $\frac{d}{dv}(\tan(\cot v))=-(1+\cot^2 v)(1+\tan^2(\cot v))=-\csc^2 v\sec^2(\cot v)$

❖ مشتقات دوم و سوم y'', y''' را درصورتی بیابید که:

$1)\ y=5x^{10}+10x^5+1$

حل:

$y=5x^{10}+10x^5+1 \Rightarrow y'=50x^9+50x^4 \Rightarrow y''=450x^8+200x^3$

$\Rightarrow y'''=3600x^7+600x^2$

$2)\ y=\left(1+x^2\right)^3$

حل:

$y=\left(1+x^2\right)^3 \Rightarrow y'=6x\left(1+x^2\right)^2 \Rightarrow y''=6\left(1+x^2\right)^2+24x^2\left(1+x^2\right)$

$\Rightarrow y'''=24x\left(1+x^2\right)+48x\left(1+x^2\right)+48x^3=120x^3+72x$

$3)\ y=\dfrac{x}{1+x}$

حل:

$y=\dfrac{x}{1+x} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow y''=\dfrac{-2}{(1+x)^3} \Rightarrow y'''=\dfrac{6}{(1+x)^4}$

$4)\ y=\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2$

حل:

$y=\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow y''=-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)+\dfrac{1}{2x^2}$

$y'''=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)-\dfrac{1}{4}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)}{4}\left[-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right]-\dfrac{1}{2x^2}$

$5)\ y=x\sin x$

حل:

$y=x\sin x \Rightarrow y'=\sin x+x\cos x \Rightarrow y''=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$

$y'''=-2\sin x-\sin x-x\cos x=-3\sin x-x\cos x$

$6)\ y=x^2\cos x$

حل:

$y=x^2\cos x \Rightarrow y'=2x\cos x-x^2\sin x \Rightarrow y''=2\cos x-2x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x$

$=2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x \Rightarrow y'''=-2\sin x-4\sin x-4x\cos x-2x\cos x+x^2\sin x$

$=-6\sin x-6x\cos x+x^2\sin x$

$7)\ y=\sin x^2$

حل:

$y=\sin x^2 \Rightarrow y'=2x\cos x-x^2\sin x \Rightarrow y''=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$

$\Rightarrow y'''=-4x\sin x^2-8x\sin x^2-8x^3\cos x^2=-12x\sin x^2-8x^3\cos x^2$

$8)\ y=\tan x$

حل:

$y=\tan x \Rightarrow y'=\left(1+\tan^2 x\right)=\sec^2 x \Rightarrow y''=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x=2\sec^2 x\cdot\tan x$

$y'''=4\sec x\cdot\sec x\cdot\tan^2 x+2\sec^2 x\left(1+\tan^2 x\right)=4\sec^2 x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x$

9) $y=\sec x$

حل:

$$y=\sec x \Rightarrow y'=\sec x\cdot\tan x \Rightarrow y''=\sec x\cdot\tan^2 x+\left(1+\tan^2 x\right)\sec x$$

$$=\sec x\cdot\tan^2 x+\sec^3 x$$

$$y'''=\sec x\cdot\tan^3 x+2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)\sec x+3\sec^2 x\cdot\sec x\cdot\tan x$$

$$=\sec x\cdot\tan^3 x+2\tan x\cdot\sec^3 x+3\sec^3 x\cdot\tan x$$

$$=\sec x\cdot\tan^3 x+5\sec^3 x\cdot\tan x$$

10) نشان‌دهید که به‌ازای هر $x\neq 0, n=1,2,3,\ldots$

$$\frac{dn}{dx^n}\frac{1}{x}(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$$

حل: برای اثبات از استقرا استفاده می‌کنیم.

$$n=1 \Rightarrow \frac{d}{dx}.\frac{1}{x}=\frac{-1}{x^2}=(-1)^1\frac{1!}{x^{1+1}}$$ صحیح است

فرض می‌کنیم $\frac{d^k}{dx^k}.\frac{1}{x}=(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}$ نشان می‌دهیم $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}.\frac{1}{x}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}.\frac{1}{x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}.\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left((-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}}\right)$$

$$=(-1)^k(k!)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)=(-1)^k(k!)\frac{-(k+1)x^k}{x^{2k+2}}$$

$$=(-1)^k(k!)\frac{-(k+1)}{x^{k+2}}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$$

❖ فرض‌کنید $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$ با کمترین سعی، کلیات زیر را بیابید.

11) $y^{(6)}$

حل: در تابع فوق جمله با بیشترین درجه را درنظرمی‌گیریم (رجوع‌نمائید به ۲۲۵ کتاب مرجع)

$$y=x(2x)^2\cdot(x)^3=4x^6\Rightarrow y^{(6)}=4\times 6!\,x^{6-6}=2880$$

12)

$y^{(6)}=2880\Rightarrow y^{(7)}=0$: باتوجه به مسئله ۱۱

❖ نشان‌دهید که

13) $\frac{d^8}{dx^8}\frac{x^2}{x-1}=\frac{8!}{(x-1)^9}$

حل:

$$\frac{d^8}{dx^8}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)=\frac{d^8}{dx^8}\left(\frac{x^2-1+1}{x-1}\right)=\frac{d^8}{dx^8}\left(\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}\right)=\frac{d^8}{dx^8}\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=\frac{d^8}{dx^8}(x+1)+\frac{d^8}{dx^8}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=0+(-1)^8\times\frac{8!}{(x-1)^9}=\frac{8!}{(x-1)^9}$$

❖ با استفاده از مشتقگیری ضمنی y' را در صورتی بیابید که x, y درمعادله داده شده صدق کند .

1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

حل:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=\frac{d}{dy}(1) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{9}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{2}+\frac{2}{9}y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y} \;\Rightarrow\; y'=\frac{-9x}{4y}$$

به کمک فرمول (۳) کتاب مرجع به راحتی می توان y' را محاسبه نمائیم بدین ترتیب

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{4}+\frac{2yy'}{9}=0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{9x}{4y}$$

2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

حل:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1 \;\Rightarrow\; \frac{2x}{9}-\frac{2yy'}{4}=0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{4x}{9y}$$

3) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1$

حل:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2y^3y'}=0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{y^3}{x^3}$$

4) $x^3+y^3=3xy$

حل:

$$x^3+y^3=3xy \;\Rightarrow\; x^3+y^3-3xy=0 \;\Rightarrow\; 3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$$

$$3x^2-3y+3y^2y'-3xy'=0 \;\Rightarrow\; y'(3y^2-3x)=3y-3x^2 \;\Rightarrow\; y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

5) $(xy)^3=3(x+y)$

حل:

$$(xy)^3=3(x+y) \;\Rightarrow\; (xy)^3-3(x+y)=0 \;\Rightarrow\; 3(xy)^2(y+y'x)-3-3y'=0$$

$$3x^2y^2+3x^3y^2y'-3y'-3=0 \;\Rightarrow\; y'(3x^3y^2-3)+(3x^2y^3-3)=0$$

$$\Rightarrow\; y'(x^3y^2-1)=-(x^2y^3-1) \;\Rightarrow\; y'=-\frac{x^2y^3-1}{x^3y^2-1}=\frac{x^2y^3-1}{1-x^3y^2}$$

6) $x^3+x^2y+xy^2+y^3=1$

حل:

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=1 \;\Rightarrow\; 3x^2+2xy+x^2y'+y^2+2xyy'+3y^2y'=0$$

$$\Rightarrow\; y'(x^2+2xy+3y^2)+3x^2+2xy+y^2=0 \;\Rightarrow\; y'=-\frac{3x^2+2xy+y^2}{x^2+2xy+3y^2}$$

7) $x^{2/3}+y^{-2/3}=8$

حل: $x^{2/3}+y^{-2/3}=8 \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3}-\frac{2}{3}y^{-5/3}y'=0 \Rightarrow y'=\frac{x^{-1/3}}{y^{-5/3}}=x^{-1/3}y^{5/3}$

8) $y^2=\frac{1}{x+y}$

حل: $y^2=\frac{1}{x+y} \Rightarrow y^2x+y^3=1 \Rightarrow 2yy'x+y^2+3y^2y'=0$

$\Rightarrow y'(2yx+3y^2)+y^2=0 \Rightarrow y'=\frac{-y^2}{2xy+3y^2} \Rightarrow \frac{-y}{2x+3y}$

9) $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=2$

حل: $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=2 \Rightarrow \frac{x-y-x-y}{x^2-y^2}=2 \Rightarrow \frac{-2y}{x^2-y^2}=2 \Rightarrow -y=(x^2-y^2)$

$\Rightarrow -y'=2x-2yy' \Rightarrow y'(2y-1)=2x \Rightarrow y'=\frac{2x}{2y-1}$

11) $\sin x+\cos y=0$

حل: $\sin x+\cos y=0 \Rightarrow \cos x-y'\sin y=0 \Rightarrow y'=\frac{\cos x}{\sin y}$

12) $y=\sin(x+y)$

حل: $y=\sin(x+y) \Rightarrow y'=\cos(x+y)(1+y')=\cos(x+y)+y'\cos(x+y)$

$\Rightarrow y'(1-\cos(x+y))=\cos(x+y) \Rightarrow y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

10) $\frac{1+xy}{x+y}=10$

حل: $\frac{1+xy}{x+y}=10 \Rightarrow 10x+10y-xy-1=0 \Rightarrow 10+10y'-y-xy'=0$

$y'(10-x)=y-10 \Rightarrow y'=\frac{y-10}{10-x}$

13) $\cos xy=x$

حل: $\cos xy=x \Rightarrow \cos xy-x=0 \Rightarrow (-\sin xy)(y+y'x)-1=0$

$\Rightarrow -y\sin xy-y'x\sin xy-1=0 \Rightarrow -y'x\sin xy=1+y\sin xy \Rightarrow y'=-\frac{1+y\sin xy}{x\sin xy}$

14) $y\tan y=x^2$

حل: $y\tan y=x^2 \Rightarrow y\tan y+yy'(1+\tan^2 y)-2x=0 \Rightarrow y'(\tan y+y\sec^2 y)=2x$

محور x است پس ... محور y نمودار را

فقط در یک نقطه قطع می‌کند و بر منحنی مماس نیست.

19) **یک منحنی غیر از دایره بیابید که برای آن تعریف (یک) درست باشد.**

حل: سهمی $y = x^2$ جز در $p = (0,0)$

❖ **معادلهٔ مماس بر منحنی‌های زیر را بیابید.**

20) $y = \frac{1}{x}$ در $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

حل: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $a = 2$, $f(a) = \frac{1}{2}$, $f'(a) = -\frac{1}{4}$

معادله خط مماس : $y = f'(a)(x-a) + f(a) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{x}{4} + 1$

21) $y = \frac{1}{x}$ در $(-1,-1)$

حل: $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $a = -1$, $f(a) = -1$, $f'(a) = -1$

معادله خط مماس : $y = -1(x+1) - 1 \Rightarrow y = -x - 2$

22) $y = \frac{1}{x^2}$ در $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

حل: $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $a = -\frac{1}{2}$, $f(a) = 4$, $f'(a) = 16$

معادله خط مماس : $y=16\left(x+\frac{1}{2}\right)+4 \Rightarrow y=16x+12$

23) $y=\tan x$ در $(0,0)$

حل: $f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=1+\tan^2 x \quad , \quad a=0 \quad , \quad f(a)=0 \quad , \quad f'(a)=1$

معادله خط مماس : $y=1(x-0)+0 \Rightarrow y=x$

24) $y=\csc x$ در $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$

$y=\csc x=\frac{1}{\sin x} \Rightarrow f'(x)=-\csc x\cot x \quad , \quad a=\frac{\pi}{4} \quad , \quad f(a)=\sqrt{2} \quad , \quad f'(a)=-\sqrt{2}$

معادله خط مماس : $y=-\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2} \Rightarrow y=-\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}+\sqrt{2}$

25) $y=\frac{8}{(x^2+4)}$ در $(2,1)$

حل: $f(x)=\frac{8}{x^2+4} \Rightarrow y'=\frac{0(x^2+4)-8(2x)}{(x^2+4)^2}=-\frac{16x}{(x^2+4)^2} \; , \; a=2 \; , \; f(a)=1 \; , \; f'(a)=-\frac{1}{2}$

معادله خط مماس : $y=-\frac{1}{2}(x-2)+1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$

❖ **معادلهٔ قائم به منحنی‌های زیر را بیابید.**

26) $y=\frac{1}{x}$ در $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$

حل: $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad , \quad a=-\frac{1}{2} \quad , \quad f(a)=-2 \quad , \quad f'(a)=-4$

معادله خط قائم : $y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a) \Rightarrow y=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)-2 \Rightarrow y=\frac{x}{4}-\frac{15}{8}$

27) $y=\frac{1}{x^2}$ در $\left(2,\frac{1}{4}\right)$

حل: $f(x)=\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{x^3} \quad , \quad a=2 \quad , \quad f(a)=\frac{1}{4} \quad , \quad f'(a)=-\frac{1}{4}$

معادله خط قائم : $y=4(x-2)+\frac{1}{4} \Rightarrow y=4x-\frac{31}{4}$

28) $y=\cot x$ در $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

حل: $f(x)=\cot x \Rightarrow f'(x)=-(1+\cot^2 x) \quad , \quad a=\frac{\pi}{2} \quad , \quad f(a)=0 \quad , \quad f'(a)=-1$

معادله خط قائم : $y=1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+0 \Rightarrow y=x-\frac{\pi}{2}$

29) $y=\sec x$ در $\left(-\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$

حل:

$f(x)=\sec x \Rightarrow f'(x)=\sec x\tan x \quad , \quad a=-\frac{\pi}{4} \quad , \quad f(a)=\sqrt{2} \quad , \quad f'(a)=-\sqrt{2}$

معادله خط قائم : $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2} \Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\frac{\pi}{4}\right)$

30) منحنی $y=\frac{1}{x}$ مماسی دارد که از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد. آن را بیابید.

α

حل: فرض می‌کنیم نقطه $p=(x_0,y_0)$ نقطه تماس خط مماس با منحنی $y=\frac{1}{x}$ باشد لذا داریم که:

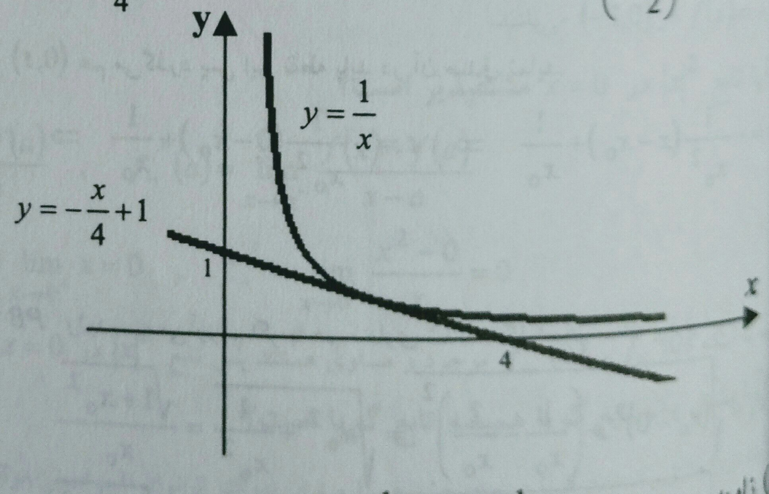
$f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad , \quad a=x_0 \quad , \quad f(a)=\frac{1}{x_0} \quad , \quad f'(a)=-\frac{1}{{x_0}^2}$

معادله خط مماس : $y=-\frac{1}{{x_0}^2}(x-x_0)+\frac{1}{x_0}$

چون خط مماس فوق از نقطه $(0,1)$ می‌گذرد پس نقطه $(0,1)$ در معادله آن باید صدق نماید.

با $y=-\frac{1}{{x_0}^2}(x-x_0)+\frac{1}{x_0} \Rightarrow 1=-\frac{1}{{x_0}^2}(0-x_0)+\frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0=2 \Rightarrow y_0=\frac{1}{x_0} \Rightarrow y_0=\frac{1}{2}$

با داشتن نقطه تماس $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ معادله خط مماس برابر است با: $y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{x}{4}+1$



31) زاویه بین منحنی‌های $y=\frac{1}{x^2}$ و $y=\frac{1}{x}$ در نقطه $(1,1)$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} f_1(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f_1(x)=-\frac{1}{x^2} \quad , \quad f_1(1)=-1 \Rightarrow m_1=-1 \\ f_2(x)=\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'_2(x)=-\frac{2}{x^3} \quad , \quad f'_1(1)=-2 \Rightarrow m_2=-2 \end{cases}$$

$\tan\alpha=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-2+1}{1+2}\right|=\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha=18.435^{\circ}$

$\ldots \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{6}\left(3x^2\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{24}\left(4x^3\right) \Rightarrow y = \frac{1}{24}x^4$:حل

$64)\ y''' = x^2$

حل: $y''' = x^2 = \frac{1}{3}\left(3x^2\right) \Rightarrow y'' = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{12}\left(4x^3\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{12}x^4 = \frac{1}{60}\left(5x^4\right) = \frac{x^5}{60}$

❖ از عبارات زیر مشتق بگیرید.

$65)\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

حل:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$y' = \frac{0\left(\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) - \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\sqrt{1+x^2}\right]}{\left(1+x^2\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{\frac{x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(1+x^2\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2} = -\frac{x^2 + x\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$=-\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}=-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

66) $\tan\left(\sec x^2\right)$

$$y=\tan\left(\sec x^2\right)\ \Rightarrow\ y'=2x\sec x^2\ \tan x^2\left(1+\tan^2\left(\sec x^2\right)\right)$$
$$=2x\sec x^2\ \tan x^2\ \sec^2\left(\sec x^2\right)$$

67) $\sqrt{\sin\left(\tan\sqrt{x}\right)}$

$$y=\sqrt{\sin\left(\tan\sqrt{x}\right)}$$
$$y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)\cos\left(\tan\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{\sin\left(\tan\sqrt{x}\right)}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}\ \cos\left(\tan\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{\sin\left(\tan\sqrt{x}\right)}}$$
$$=\frac{\sec^2\sqrt{x}\cos\left(\tan\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}\ \sqrt{\sin\left(\tan\sqrt{x}\right)}}=\frac{1}{4}\frac{\sec^2\sqrt{x}\cos\ \left(\tan\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x^2\ \sin\left(\tan\sqrt{x}\right)}}$$

68) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\quad,\quad \sqrt{x}=u\quad,\quad \sqrt{x+u}=t$$

$$\begin{cases}u=\sqrt{x}\Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\\ t=\sqrt{x+u}\Rightarrow t'=\dfrac{1+u'}{2\sqrt{x+u}}\end{cases}\ \Rightarrow\ t'=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\ \sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$y=\sqrt{x+t}\ \Rightarrow\ y'=\frac{1+t'}{2\sqrt{x+t}}=\frac{1+\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\ \sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{4\sqrt{x}\ \sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)}$$

69) $\sin\left(\cos\left(\sin x^2\right)\right)$

$$\begin{cases}u=\sin x^2\Rightarrow u'=2x\cos x^2\\ t=\cos(u)\Rightarrow t'=-u'\sin(u)\end{cases}\ \Rightarrow\ t'=-2x\cos x^2\ \sin\left(\sin x^2\right)\quad(1)$$

$$y=\sin\left(\cos\left(\sin x^2\right)\right)=\sin(t)\ \Rightarrow\ y'=t'\cos t\qquad(2)$$

$$(1),(2)\ \Rightarrow\ y'=-2x\cos x^2\ \sin\left(\sin x^2\right)\cos\left(\cos\left(\sin x^2\right)\right)$$
$$=-x\cos\left(\cos\left(\sin x^2\right)\right)\sin\left(\sin x^2\right)\cos x^2$$

$$70)\ \sin(\cos(\tan(\cot x)))$$

حل:

$$\begin{cases} u=\cot x & \Rightarrow \quad u'=-\left(1+\cot^2 x\right)=-\csc^2 x \\ v=\tan(u) & \Rightarrow \quad v'=u'\left(1+\tan^2 x\right)=u'\sec^2 u=-\csc^2 x\sec^2\left(\csc^2 x\right) \\ t=\cos(\tan(v)) & \Rightarrow \quad t'=-v'\left(1+\tan^2 v\right)\sin(\tan v)=-v'\left(\sec^2 v\right)\sin(\tan v) \quad (1) \end{cases}$$

$$y=\sin(\cos(\tan(\cot x)))=\sin t \quad \Rightarrow \quad y'=t'\cos t \qquad (2)$$

$$(1),(2) \quad \Rightarrow \quad y'=-v'\left(\sec^2 v\right)\sin(\tan v)=\csc^2 x\sec^2\left(\csc^2 x\right)\sec\tan(x)\sin(\tan(\tan(x)))$$

$$=\csc^2 x\sec^2\left(\csc^2 x\right)\sec(\tan(\cot x))\sin(\tan(\cot c))$$

71) فرض کنید $P(x)=f(x)g(x)$ و $f'(x)g'(x)=c$ ، که در آن c ثابت بوده و مشتقات سوم f''' و g''' وجود دارند، نشان دهید که: $\dfrac{P'''(x)}{P(x)}=\dfrac{f'''(x)}{f(x)}+\dfrac{g'''(x)}{g(x)}$

حل:

$$P(x)=f(x)g(x)$$

$$P'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x) \quad , \quad P''(x)=f''(x)g(x)+\underbrace{g'(x)f'(x)}_{c}+g''(x)f(x)+\underbrace{g'(x)f'(x)}_{c}$$

$$P'''(x)=f'''(x)g(x)+g'(x)f''(x)+0+g'''(x)f(x)+f'(x)g''(x)+0$$

$$=f'''(x)g(x)+g'''(x)f(x)+g'(x)f''(x)+f'(x)g''(x)$$

$$\frac{P'''(x)}{P(x)}=\frac{f'''(x)g(x)+g'''(x)f(x)+g'(x)f''(x)+f'(x)g''(x)}{f(x)g(x)}$$

$$=\frac{f(x)g(x)\left[\dfrac{f'''(x)}{f(x)}+\dfrac{g'''(x)}{g(x)}\right]}{f(x)g(x)}+\frac{g'(x)f''(x)+f'(x)g''(x)}{f(x)g(x)}$$

$$=\frac{f'''(x)}{f(x)}+\frac{g'''(x)}{g(x)}+\frac{\left[f'(x)g'(x)\right]'}{f(x)g(x)}=\frac{f'''(x)}{f(x)}+\frac{g'''(x)}{g(x)}+0=\frac{f'''(x)}{f(x)}+\frac{g'''(x)}{g(x)}$$

با توجه به اینکه $f'(x)g'(x)=c$ ثابت می‌باشد لذا مشتق آن مساوی صفر است.

72) مماس و قائم نمودار معادلهٔ $y^6+y^5-xy+2=0$ در نقطهٔ $(4,1)$ را بیابید.

حل: